MATHÉMATIQUES I

Option Économique

École conceptrice : EMLYON

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

L'exercice 1 (analyse) propose l'étude d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

Partie I

La partie I introduit une fonction g définie sur $[0\,;1]$ et fait étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Dès cette première question, on constate de erreurs de raisonnement.

Des candidat(e)s ne voient même pas le problème en 0, ou affirment que g est continue en 0 sous la seule raison que $g(0)=0$.

D'autres, confondant continuité et dérivabilité, se lancent dans l'étude lourde et inutile d'un taux d'accroissement.

Certaines copies comportent une confusion entre t et $\dfrac{1}{t}$ et on a trouvé $\ln t = \underset{t \longrightarrow 0}{o}(t)$ (faux) au lieu de $\ln t = \underset{t \longrightarrow 0}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ (correct).

Enfin, dans quelques copies qui se focalisent sur l'étude en 0, il y a oubli de l'étude sur $]0\,;1]$.

2. Le calcul est souvent correct, mais il y a quelquefois une erreur sur le signe du terme $\dfrac{x^2}{2}\ln x$.

3. Des correcteurs ont rencontré l'écriture aberrante $\ln(0)$.

Partie II

La partie II définit une fonction f, propose l'étude qualitative de l'équation $f\,'(t)=0$, d'inconnue $t \in]0\,;1[$, et demande l'écriture d'un programme de dichotomie en Turbo-Pascal.

1. Il y a confusion entre $t^{1/3}$ et $\dfrac{1}{t^3}$, c'est-à-dire entre $t^{1/3}$ et t^{-3}.

La définition de f n'est pas toujours comprise.

De même qu'en I1., des candidat(e)s ne voient pas le problème en 0, ou affirment que f est continue en 0 sous la seule raison que $f(0)=0$.

2. La rédaction de la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est souvent confuse.

3. Des candidat(e)s confondent classe C^1 et continuité par morceaux, et confondent densité et fonction de répartition.

4.a. Des copies comportent des erreurs dans le calcul sur les puissances, en particulier pour calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto t^{-2/3}$.

La définition des notions de classe C^1, de classe C^2 ne sont pas toujours sues, des candidat(e)s confondant dérivabilité et classe C^1.

4.b. Lors de l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, il y a souvent oubli de la continuité, et, lors de l'utilisation du théorème de la bijection monotone, il y a souvent oubli de la continuité ou du caractère strict de la monotonie.

4.c. Question rarement abordée, dans seulement 10 % des copies. La méthode de dichotomie est souvent inconnue, ou confondue avec une méthode d'itération, certain(e)s candidat(e)s proposant un $x := f(x)$ aberrant.

Partie III

La partie III introduit une fonction de répartition.

1. Le calcul est souvent correct, mais il y a quelquefois une erreur sur le signe du terme $\dfrac{x^2}{2}\ln x$, comme en I1.

2. Le cas $x > 1$ est souvent oublié.

Il y a quelquefois confusion entre $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et la valeur obtenue pour $F(x)$, lorsque $x \in]0\,;1[$, est alors fausse.

Trop de candidat(e)s oublient de vérifier la cohérence de leurs résultats, et donnent, par exemple, à $F(x)$ des valeurs < 0 ou des valeurs > 1.

3. Quand la question n'est pas omise, la courbe fournie est souvent en contradiction avec la notion de fonction de répartition : F doit être croissante, continue, de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

Partie IV

La partie IV fait étudier l'existence d'un extremum local pour une fonction réelle G de deux variables réelles, définie à partir de f.

1. Dans la grande majorité des copies, le schéma fourni est faux, à l'étonnement des correcteurs.

2. Des candidat(e)s oublient un facteur 2 : la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(2x)$ est la fonction $x \longmapsto 2f'(2x)$ et non la fonction $x \longmapsto f'(2x)$.

D'autres s'enlisent dans de lourdes écritures inutiles, ne pensant pas à exploiter la notation f, ce que l'énoncé indique cependant.

3. Souvent correctement traitée, l'oubli du facteur 2 à la question précédente n'ayant pas d'influence sur les équations obtenues.

La définition d'un point critique est très souvent connue.

Les correcteurs ont rencontré des notations aberrantes, comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+y)$, c'est-à-dire une confusion entre fonction d'une variable réelle et fonction de deux variables réelles.

4. L'unicité est rarement établie, la plupart des candidat(e)s se contentant de vérifier que le point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ convient.

5. Une partie des candidat(e)s qui ont abordé cette question s'est égarée dans de lourdes écritures inutiles, ne pensant pas à exploiter la notation f.

Le cours sur les extremums locaux d'une fonction réelle de deux variables réelles est en général su.

Cependant, des candidat(e)s croient, à tort, que $rt - s^2 > 0$ est une condition nécessaire et suffisante d'extremum local, alors que ce n'est qu'une condition suffisante (en un point critique d'une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

L'exercice 2 (algèbre) demande d'effectuer une diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 4 puis de déterminer son commutant.

1. Trop de candidat(e)s ne remarquent pas que A est symétrique.

Les correcteurs ont encore rencontré les erreurs classiques, du genre : A est diagonale (elle ne l'est pas), A est inversible donc diagonalisable (raisonnement faux).

2. La question est en général correctement traitée.

Mais dans quelques copies, il y a incohérence entre le nombre de valeurs propres de A et l'ordre de A, quelques candidat(e)s trouvant cinq valeurs propres pour une matrice carrée d'ordre quatre.

La résolution des systèmes linéaires donnant les sous-espaces propres comprend des erreurs de calcul.

3. En général correct.

4. Les notions théoriques d'algèbre linéaire ne sont pas toujours assimilées : certain(e)s candidat(e)s confondent sous-espace vectoriel et application linéaire.

Il y a quelquefois oubli de la condition $\mathrm{C}_A \neq \varnothing$, et des candidat(e)s confondent C_A et $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

5. En général correct, quoique l'équivalence logique ne soit pas toujours clairement établie.

6. Trop de candidat(e)s se perdent dans des calculs matriciels mal présentés ou mal gérés.

7. Question rarement traitée, peu de candidat(e)s ayant perçu la logique de l'enchaînement des questions.

8. Question souvent abordée, même si la précédente n'a pas été traitée. Mais il y a des confusions sur la dimension.

Lorsque quatre vecteurs ne sont pas colinéaires entre eux deux à deux, on ne peut pas en déduire que la famille qu'ils forment est libre.

L'exercice 3 porte sur les probabilités discrètes finies.

Partie I

La partie I propose l'étude d'une famille de n variables aléatoires définies à partir de tirages d'une boule dans une urne, avec remise.

Dans la plupart des copies, l'argumentation et la rédaction sont insuffisantes.

1. Cette question est abordée dans une majorité des copies, mais les paramètres de la loi binomiale sont souvent inexacts, ce qui influera sur les résultats de la question 3.

2. Trop de candidat(e)s affirment, à tort, que les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, du fait que les tirages se font avec remise. La notion d'indépendance pour des variables aléatoires est souvent mal assimilée.

3.a. Les correcteurs ont souvent rencontré un raisonnement faux portant sur la somme de deux variables aléatoires qui suivent une loi binomiale, mais ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

3.b. La question est rarement réussie, soit par incompréhension de la notion d'indépendance pour des variables aléatoires, soit à cause d'erreurs sur les paramètres.

Partie II

La partie II porte sur une suite de variables aléatoires.

1. Les réponses pour Z_1 sont souvent correctes.

Mais, pour Z_2, il y a de nombreuses erreurs, souvent par confusion sur le choix d'une boule. Les correcteurs ont souvent eu sous les yeux $P(Z_2 = 1) = \dfrac{1}{n^2}$ au lieu de $\dfrac{1}{n}$. Le résultat pour $P(Z_2 = 2)$, qui s'en déduit, est alors faux, ainsi que l'espérance $E(Z_2)$.

2.a. Ici aussi, on trouve de nombreuses erreurs, avec des confusions entre $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^k}$, $\dfrac{1}{n^{k-1}}$.

2.b. La question est peu abordée, et, lorsqu'elle l'est, les explications sont souvent confuses ou incomplètes, avec un système complet d'événements qui n'en est pas un, ou pire avec confusion entre événement et probabilité.

2.c. Question rarement abordée.

3.a.,b. Ces deux questions sont correctement traitées lorsqu'elles sont abordées, en utilisant le résultat de la question 2.a.

Partie III

La partie III fait calculer $P(Z_k = i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ dans le cas particulier où $n = 4$.

1. La valeur pour $P(Z_k = 1)$ est souvent fausse, en liaison avec la question II2.a.

La valeur pour $P(Z_k \geqslant 5)$ est en général bien vue.

2. De très rares copies ont abordé et réussi cette question.

3.a. Question peu abordée, avec souvent une erreur de signe et une méconnaissance du cours (formule du crible).

3.b. Question assez souvent traitée, et correctement.

3.c. Question de synthèse, rarement abordée.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, exempt d'erreur d'énoncé, équilibré, progressif, complet et couvrant une large partie des connaissances exigibles, bien gradué en difficulté, de longueur convenable, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, et bien adapté à la voie économique.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi, grâce à quelques questions ouvertes, la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans les questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager. L'écart entre les très bonnes copies et les copies très faibles s'est encore creusé. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours. Dans certaines copies, les compétences des candidat(e)s en mathématiques apparaissent inférieures à celles attendues pour le baccalauréat. Ils (elles) devraient sans doute au moins veiller à les travailler et à les conforter.

Les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

Les deux premiers exercices sont abordés dans la quasi-totalité des copies.

Dans l'ensemble, la présentation a paru convenable, malgré quelques copies très peu soignées ou illisibles. Mais la rédaction est souvent trop approximative et les candidat(e)s manquent de rigueur dans les notations, les phrases mathématiques et l'argumentation.

Il est impératif que les questions soient numérotées selon l'énoncé et clairement séparées. Les résultats et les réponses doivent être mis en évidence, par exemple en les encadrant.

L'éventail complet des notes a été utilisé et le sujet a joué parfaitement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.