**Partie I. Inf et Sup**

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $E(U_1)$ et de $V(U_1)$.

3. a) Calculer, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, $P([T_n \leqslant k])$.
b) En déduire la loi de probabilité de $T_n$.

4. a) Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.
b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $N$ et $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n)$.
c) Établir la formule suivante : $V(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n)$.
d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$ ; en déduire que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on a : $V(T_n) \sim d_n(N)$.

5. Déterminer la loi de $Z_n$. Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

6. On rappelle que la fonction Pascal **random(N)** permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$. Écrire une fonction Pascal d'en-tête `simulmax(n : integer) : integer` qui simule la variable aléatoire $T_n$.

**Partie II. Couple (Inf, Sup)**

7. On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(k,\ell)$ de $\mathbb{N}^2$ : $\phi_n(k,\ell) = P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell])$.
a) Montrer, pour tout $(k,\ell)$ de $[\![1, N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

b) Établir, pour tout $(k,\ell)$ de $[\![1, N]\!]^2$, la formule suivante :

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1)$$

c) En déduire, en distinguant les trois cas $k < \ell, k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de $k$ et $\ell$.

8. On donne, pour tout couple $(m,n)$ de $(\mathbb{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :
i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (m+1)^n - m^n - 1$ ;
ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = m(m+1)^n - (m+1)m^n$.
a) En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la formule suivante : $E(T_n Z_n) = N\,(1 + d_{n+1}(N))$.
b) On note, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $\rho_n$ le coefficient de corrélation linéaire entre $T_n$ et $Z_n$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n$ lorsque $N \geqslant 2$.

9. a) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(k,\ell)$ de $[\![1, N]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}([Z_n = \ell])$.
b) En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(Z_n/[T_n = k])$ de $Z_n$ sachant $[T_n = k]$.

**Partie III. Prévision**

Pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un $(n+1)$-échantillon indépendant identiquement distribué (i.i.d.) $(U_1, U_2, \dots, U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

On pose : $T_n = \sup(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $T_{n+1} = \sup(U_1, U_2, \dots, U_{n+1}) = \sup(T_n, U_{n+1})$.

Pour tout $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ de $\mathbb{R}^N$, on pose : $W_t(T_n) = \sum_{k=1}^{N} t_k \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de $t$ pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $E(W_t(T_n)) = E(T_{n+1})$ ;

ii) $E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2]$ est minimale.

10. Montrer, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, la relation : $P([W_t(T_n) = t_k]) = P([T_n = k])$.

11. Établir, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, la formule suivante :

$$E(T_{n+1} \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}) = E(T_{n+1}/[T_n = k]) \times P([T_n = k])$$

12. a) Calculer, pour tout couple $(k, j)$ de $[\![1, N]\!]^2$, $P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j])$.

b) En déduire, pour tout couple $(k, j)$ de $[\![1, N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}([T_{n+1} = j])$.

c) Déterminer, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(T_{n+1}/[T_n = k])$ de $T_{n+1}$ sachant $[T_n = k]$.

d) En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\left(E(T_n^2) - E(T_n)\right)$$

13. Établir l'égalité suivante : $(W_t(T_n))^2 = \sum_{k=1}^{N} t_k^2 \times \mathbf{1}_{[T_n=k]}$.

14. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1, t_2, \dots, t_N) = E[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2]$$

a) À l'aide des résultats des questions 11, 12 et 13, expliciter $g$ en fonction des variables $t_1, t_2, \dots, t_N$.

b) Montrer que $g$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$ atteint en un point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $E(T_{n+1}/[T_n = 1]), E(T_{n+1}/[T_n = 2]), \dots, E(T_{n+1}/[T_n = N])$.

15. Établir les deux relations suivantes :

$$E\left(W_\theta(T_n)\right) = E(T_{n+1}) \quad \text{et} \quad V\left(W_\theta(T_n)\right) \leqslant V(T_{n+1})$$

16. a) Établir, pour tout $i$ de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\sum_{k=1}^{N} k^i \times \mathbf{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i$.

b) En déduire la relation suivante : $W_\theta(T_n) = \dfrac{N+1}{2} + \dfrac{1}{2N}\left(T_n^2 - T_n\right)$.

**Partie IV. Estimation**

Soit $U$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$. On suppose que le paramètre $N$ est inconnu.

Cette partie a pour objet la détermination d'un estimateur ponctuel de $N$, sans biais et de variance minimale.

Pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, soit $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ un $n$-échantillon i.i.d. de la loi de $U$.

17. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. On pose :

$$A_n(\varepsilon) = [|T_n - N| \geqslant \varepsilon] \text{ et } B_n(\varepsilon) = [|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant \varepsilon]$$

a) Peut-on dire que $T_n + d_n(N)$ est un estimateur sans biais de $N$ ?

b) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais du paramètre $N$.

c) Montrer que $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ et qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que, pour tout $n > n_0$, on a : $B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2]$.

d) En déduire que la suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

18. a) Calculer, pour tout $n$-uplet $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $[\![1, N]\!]^n$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right)$.

b) En déduire que, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ sachant $[T_n = k]$ est donnée par :

$$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si pour tout } i \text{ de } [\![1, n]\!],\ 1 \leqslant u_i \leqslant N \text{ et } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*On remarquera que cette loi conditionnelle ne dépend pas du paramètre $N$.*

19. On pose, pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$ : $S_n = T_n + Z_n - 1$ et, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$ : $\psi_n(k) = \dfrac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}$.

a) Montrer que $S_n$ est un estimateur sans biais de $N$.

b) Établir, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, l'égalité : $\psi_n(k) = E(S_n/[T_n = k])$.

c) En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de $N$.

d) On pose, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$ : $\varphi_n(k) = E(S_n^2/[T_n = k])$.
Établir, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, l'inégalité : $\psi_n^2(k) \leqslant \varphi_n(k)$ (on pourra utiliser la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\lambda \mapsto E((S_n - \lambda)^2/[T_n = k])$). En déduire que $V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n)$.

e) Calculer $V(S_n)$. En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur convergent de $N$.

20. Soit, pour $n$ entier de $\mathbb{N}^*$, un estimateur sans biais $R_n$ du paramètre $N$.
On pose, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$ : $f_n(k) = E(R_n/[T_n = k])$.

a) En utilisant une méthode analogue à celle de la question 19.d, montrer que : $V(f_n(T_n)) \leqslant V(R_n)$.

b) Soit $F$ une fonction réelle. Montrer que, pour $n$ fixé dans $\mathbb{N}^*$, la condition «pour tout $N$ de $\mathbb{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$» est vérifiée, si et seulement si, pour tout $k$ de $[\![1, N]\!]$, on a : $F(k) = \psi_n(k)$.

c) En déduire que dans l'ensemble des estimateurs sans biais de $N$, l'estimateur $\psi_n(T_n)$ est optimal, dans le sens où $V(\psi_n(T_n))$ est minimale.

*La partie IV constitue une démonstration du théorème de Lehmann-Scheffé dans le cas particulier d'une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, avec $N$ inconnu.*